

## Hva er det de gjør som ikke vi gjør?

*Hvis vi ser på resultatene fra internasjonale undersøkelser som TIMSS, finner vi mange asiatiske land på de øverste plassene. Det er da naturlig å spørre seg hva er det de gjør som vi tydeligvis ikke klarer å få til. Hva er det f.eks Singapore, som ligger helt øverst, gjør i forhold til matematikkundervisning?*

### Hvordan er situasjonen i Norge?

Norge scorer lavt på internasjonale undersøkelser som TIMSS og PISA, og vi har sett en negativ utvikling i elevenes kompetanse i matematikk de siste 10-15 årene. Norge og Sverige var for eksempel de to landene som markerte seg med den største tilbakegangen i elevenes prestasjoner i matematikk i 8. klasse i TIMSS fra 1995 til 2003[1].

Norsk skole ligger ikke spesielt lavt i timetall når det gjelder realfagene i 8.trinn, men noe under gjennomsnittet internasjonalt når det gjelder 4.trinn. Vi er også et av de landene i verden som bruker mest penger pr elev. Skal vi forklare hvorfor de norske elevene ikke skårer høyere enn de gjør totalt sett, er det vanskelig å finne en forklaring på det ved å se på antall undervisningstimer eller lærertetthet. Det er derfor rimelig å rette oppmerksomheten mot undervisningen, nærmere bestemt hvordan den foregår, og hvilke forutsetninger for læring den skaper [2].

L97 fikk direkte konsekvenser for undervisningen, i og med at det ble krevd større elevmedvirkning og mer elevaktivitet. Elevene skulle være aktive, og det ble ofte tolket som å drive med ulike aktiviteter av typen prosjektarbeid, lek og eksperimenter. Vi kan kanskje si at fokuset til en viss grad ble flyttet fra de faglige læringsmålene til å fokusere på spesielle og varierte aktivitetstyper. Blant annet ble veldig ”riktig” med uteskole, det vil si å flytte undervisningen ut av klasserommet og ut i skogen og uterommet. Begrunnelsen var at da kunne elevene få lære med flere sanser enn når de bare ble sittende ved pulten sin. Vi ser at bruken av ulike læringsaktiviteter bar preg av å være mål i seg selv uten at de ble relatert til klare læringsmål.

Evalueringen av Reform 97 tyder da også på at norsk grunnskole i for stor grad er preget av lite faglig fokus og sammenheng i læringsarbeidet. Det blir hevdet at nettopp dette er den viktigste grunnen til Norges dårlige resultater i PISA og TIMSS. Elevene er gjerne aktive i timene, men svært ofte foregår denne aktiviteten uten klare faglig mål. I tillegg viser det seg at det er lite systematisk og oppsummert refleksjon rundt hensikten med de ulike aktivitetene, og det brukes lite tid til avrundning og oppsummering[3]. Det blir også brukt relativt mye tid på utenomfaglige aktiviteter i det norske klasserommet. Studier viser at bare rundt 50 prosent av de observerte aktivitetene i barneskolen kan knyttes til faglig læring eller til emner fra læreplanen [4].

### Singapore: En omlegging var nødvendig

Siden 90-tallet har Singapore forandret sitt syn på hvordan en bør gå frem for å få elevene til forstå og bruke matematikk. Problemløsning og åpne oppgaver har fått en helt fremtredende plass. Utdanningsdepartementet i Singapore (MOE) lansert sin visjon “*Thinking Schools, Learning Nation*” (TSLN) i 1997. På denne måten signaliserte de et behov for å legge om den tradisjonelle undervisningen ”*and embrace thinking as the nation moved towards the ability-driven era*”.

Formålet med TSLN var at elevene skulle utvikle en grunnleggende og begrepsmessig forståelse, og fortrenge det fokus som hadde vært på prosedyrer og regler. MOE mente at den gamle måten gav elevene en lærdom som var lite fleksibel, skolebunden og gav begrensede bruksmuligheter.

Det var fascinerende å høre forsker, Dr. Yeap Ban Har [5], fra Singapore fortelle hvorfor de klarer seg så bra i matematikk. Han sier de har laget en læreplan med svært høye krav, og siden det er en allmenn forståelse i samfunnet hvor viktig utdanning er, har de helt klare ambisjoner om å få omtrent alle elevene til å mestre de høye kompetansemålene. Han sier: **“The global, technological situation is such that we cannot build the future for our youths but we can build our youths for the future”.**

Siden Singapore ikke har olje eller noen andre naturressurser, er de fullstendig avhengige av sine innbyggerses “brainpower” for å klare å opprettholde sin høye levestandard. Det er altså ikke snakk om at det er nok at 1/3 av elevene lykkes på skolen, det er heller ikke nok at 2/3 lykkes! De har som mål at 95% av elevene skal klare målene i en svært ambisiøs læreplan.

Ban Har sier videre at viktige årsaker til at Singapore har lyktes med sin matematikkundervisning er:

1. Vi har en god Læreplan i matematikk
2. Vi har gode matematikkbøker som sørger for at elevene får en grunnleggende base for matematiske begreper.
3. Vi har gode matematikkekspertene som gir lærerne den nødvendige etterutdannelsen i matematikkundervisning.
4. Vi har strenge krav til hvem som får undervise i matematikk.
5. Elevene får arbeide mye med matematikk, og vi har et godt tilbud med ekstra materiell og bøker med mer utfordringer til de elevene som kan strekke seg ekstra.

En annen ting som skiller Singapore fra oss er vektleggingen av basisfagene; språk og realfag. De har en tredeling, en tredel av tiden går med til språkinnlæring, en tredel til realfagene og en tredel til resten. Det vil si at elevene har en undervisningsøkt á 90 min hver dag med matematikk. Begrunnelsen for at de bruker så mye tid på faget er blant annet:

*“It is recognized that mathematics is “an excellent vehicle for the development and improvement of a person’s intellectual competence in logical reasoning, spatial visualization, analysis and abstract thought” [6].*

Ban Har sier videre:

*Vi underviser i matematikk fordi vi vil trene barnas hjerne til å tenke. Evnen til abstraksjon må dyrkes frem hos elevene, og det skjer ikke gjennom memorisering og pugging av huskereglene. Den evnen kan vi bare skape ved å la elevene få arbeide med oppgaver som krever kreativt tankearbeid.*

### **Læreplanen i Singapore**

Læreplanen i Singapore understreker at: *“an emphasis on mathematics education will ensure that we have an increasingly competitive workforce to meet the challenges of the 21st century” [6]*

Læreplanen understreker også at det må skje en forandring i lærernes måter å undervise matematikk på. Elevene skal ha muligheter til å oppdage, resonnere og kommunisere matematikk gjennom diskusjon og aktiviteter, slik at de kan utforske og se sammenhenger.

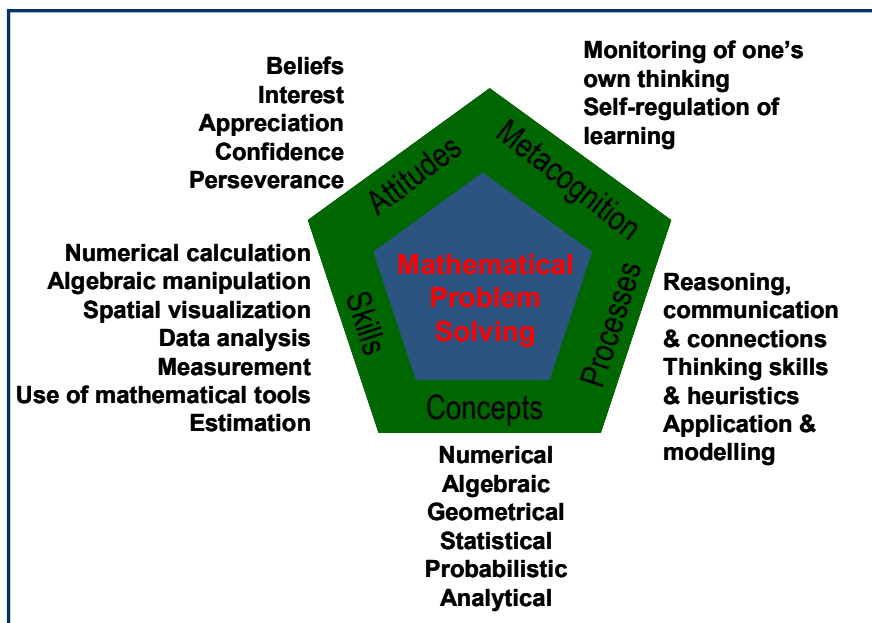
Der står det at kommunikasjon er evnen til å bruke det matematiske språket til å uttrykke matematiske ideer og argument presist, kortfattet og logisk. Kommunikasjon blir beskrevet som hjelp til at elevene kan utvikle deres egen matematiske forståelse og til å forme deres matematiske tenkning.

Disse kvalitative forandringene, krevde en stor omlegging i både undervisningsmetoder og læringsstrategier. Det ble derfor satt i gang et storstilt etterutdanningsprosjekt blant lærerne, for å flytte fokus fra ensidig drill av ferdigheter og der elevene arbeidet individuelt i bøkene, til fokus på matematiske kommunikasjon.

Læring i matematikk ved hjelp av problemløsning innebærer at elevene konstruerer matematiske begreper og utvikler ferdigheter. Det utfordrer elevene til å utforske og undersøke mønster og ikke minst til å tenke kritisk. For å løse problemer må elevene observere, se sammenhenger, stille spørsmål, resonnere og konkludere. Suksessen med problemløsning settes i sammenheng med elevenes disposisjoner eller måter å angripe problemene på og ikke minst være bevisst sin egen tenkning; nemlig metakognisjon.

### Rammeverket til Læreplanen i Singapore

Rammeverket viser de underliggende prinsippene for en effektiv matematikkundervisning. Det bestemmer retningen for undervisning, læring og evaluering i matematikk. Læreplanen understreker spesielt fem innbyrdes beslektete komponenter som vil utvikle elevenes evne til problemløsning [6]:



#### 1. Begreper :

Elevene skal utvikle og utforske matematiske ideer i dybden, og se at matematikk er en integrert helhet, ikke isolerte biter med ferdigheter. De må få varierte erfaringer gjennom undervisningen som kan legge grobunn for en dypere forståelse av matematiske begreper og

gi mening til ulike matematiske ideer og tankebilder. De må se sammenhenger og variert anvendelse av samme begrep. Å bruke konkrete, praktisk arbeid og teknologiske hjelpemidler vil være en viktig del av læringserfaringene til elevene.

## **2. Ferdigheter:**

Utvikling av ferdigheter er essensielt i læring og bruk av matematikk. Men selv om elevene må bli kompetente i ulike ferdigheter, så bør en unngå drilling av ferdigheter uten forståelse av de nødvendige, underliggende matematiske prinsippene. Å mestre ferdigheter innebærer også å kunne bruke dem i utforskning og problemløsning. Det er viktig å inkludere tankegangskompetanse og heuristiske prosesser i utviklingen av ferdigheter.

## **3. Mentale prosesser**

Matematiske prosesser refererer til den kunnskap og viten som kreves i prosessen med å bruke matematikk. Her ligger kompetanse i resonnement, kommunikasjon og se sammenhenger. Det inkluderer tangeangskompetanse og heuristikk og kompetanse i anvendelse og modellering. Eksempel på kompetanse i tangeang vil være å ha den nødvendige dyktighet i tankeprosesser til å klassifisere, sammenligne, sekvensbestemme, analysere deler og helhet, identifisere mønster og sammenhenger, induksjon, deduksjon og spatial visualisering. En beskrivelse av *heuristikk* står lengre nede i teksten.

## **4. Holdninger**

Holdninger refererer til det følelsemessige i forhold til læring av matematikk. Eksempelvis det å ha en overbevisning om nyttheten av matematikk og interesse og glede av å lære faget. Det handler om å få elevene til å verdsette det vakre og oppleve kraften i matematikken, og at de klarer å utvikle utholdenheten i forhold til for eksempel problemløsning. Elevenes holdninger i forhold til matematikk er skapt av deres erfaringer i læringssituasjoner. Ved å gjøre innlæringen av matematikken moro, meningsfullt og relevant vil mye være gjort for å skape positive holdninger til faget, som igjen vil være en helt nødvendig premiss for læring.

## **5. Metakognisjon**

Metakognisjon eller "å tenke på tenkning" refererer til bevisstheten og evne til å kontrollere sine egne tankeprosesser. Dette vil spesielt være en nødvendig kompetanse i valg og bruk av adekvate strategier i problemløsning. Følgende aktiviteter kan være med å utvikle elevenes metakognitive prosesser:

Elevene må lære seg ulike strategier for problemløsning, og de må lære seg å velge hensiktsmessige framgangsmåte fra gang til gang. Elevene må oppmuntres til å tenke høyt om hvilke strategier og metoder de velger fra gang til gang.

Elevene må oppfordres til å forsøke alternative framgangsmåter på samme problem, og få dem til å diskutere egnethet og rimelighet av svaret. Elevene må få presentere ulike metoder for hverandre og få frem ulike løsningsstrategier på samme problem.

## **Hva er heuristikk?**

Heuristikken beskjeftiger seg med metodene som kan eller bør brukes for å oppnå ny erkjennelse, for å løse problemer og for å beskrive disse metodene. Adjektivet *heuristisk* betegner tilsvarende en lett tilgjengelig fremstilling av et tema, eller at ett perspektiv har et større potensial for å belyse strukturen av et problem enn et annet [7].

Begrepet Heuristisk ble brukt av George Polya i boken: "*How to solve it*" i 1945, og betyr: "Et generelt forslag til hva en kan gjøre når en skal løse ukjente problem". Heuristisk er altså ideer til å løse problemer, dvs å lære ulike framgangsmåter å utforske og løse problem.

I Singapore har de erfart at en bevisst satsing på en heuristisk innfallsvinkel til problemløsning har gjort elevene bedre rustet til å møte ulike type oppgaver i matematikk [5].

Ban Har sier:

*Heuristics are springboards for average students to do above-average thinking.  
Heuristics are bridges for ordinary students to do extraordinary things.*

Han sier at ved blant annet å bruke ”tegn modell-metoden” er elevene blitt bedre i stand til å visualisere, se mønster og sammenhenger. Heuristikk er altså en effektiv måte å hjelpe elevene å håndtere informasjonen som er gitt i problemløsningsoppgaver, spesielt når oppgavene har mye informasjon. En heuristisk fremgangsmåte kan hjelpe elevene til å kontrollere deres egne tankeprosesser, særlig når oppgavene er typiske ”multi-step”-problemer.

Under finner dere noen eksempler på heuristisk i forhold til problemløsning. Dette er ulike metoder som elevene i Singapore lærer allerede tidlig på barnetrinnet:

**1. Lag en representasjon:**

Dvs; tegn en modell, lag en liste over gitt informasjon, bruk ligning

**2. Lag en gjennomtenkt gjetning**

Dvs; gjett og sjekk, se etter et mønster, lag hypoteser og antagelser

**3. Gå gjennom en prosess**

Dvs; dramatiser det som står, begynn bakfra, før og etter-spørsmål

**4. Forandre på problemet**

Dvs; gjenta problemet, forenkle det, løs deler av problemet.

**Problemløsning - Visualisering og konkretisering**

Når vi ser på lærebøkene i matematikk fra Singapore ser vi som sagt en systematisk opplæring helt fra de første årene på skolen i hvordan en skal gå frem for å løse problemløsningsoppgaver. Den mest vanlige metoden elevene lærer når de arbeider med problemløsningsoppgaver er den såkalte ”Tegn modell-metoden”.

Eksemplene under er hentet fra et matematikkverk for barnetrinnet. Alle oppgavene er for mellomtrinnet [8].

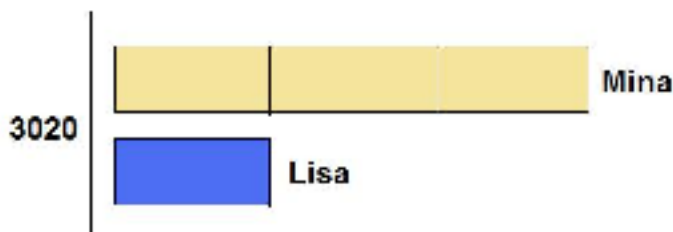
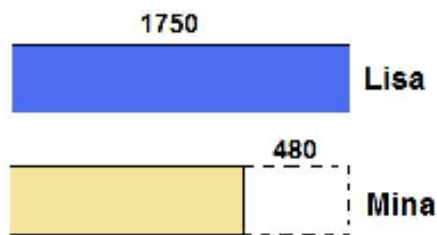
**Lisa hadde 1750 frimerker. Mina hadde 480 færre frimerker enn Lisa. Lisa gav noen frimerker til Mina. Til slutt hadde Mina tre ganger så mange frimerker som Lisa.**

**a. hvor mange frimerker hadde Mina i begynnelsen?**

**b. Hvor mange frimerker hadde Lisa til slutt?**

Eksempel på hvordan en på en enkel måte kan visualisere løsningen på oppgaven ved hjelp av "Tegn modell-metoden":

a. Mina hadde  $1750 - 480 = 1270$  frimerker



b. Til sammen har de to jentene  $1750 + 1270 = 3020$  frimerker. Det kan deles i fire like grupper med 744 i hver. Lisa har en av slik mengde og Mina har tre. (Mina har tre ganger mer enn Lisa)

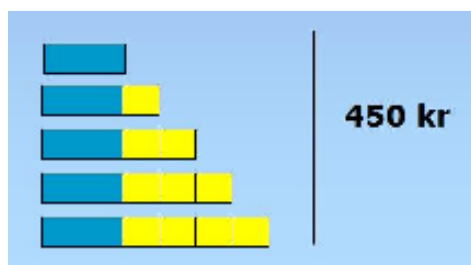
Gjennom å tegne modeller får elevene et hjelpemiddel til å håndtere informasjon, forholde seg til kompleksiteten i oppgavene, og på samme tid kommunisere hvordan de tenker. De bruker denne visualisering som støtte til tallene og all informasjonen som oppgavene gir.

Denne utstrakte bruken av heuristisk og problemløsning i lærebøkene er sannsynligvis hovedgrunnen til at lærerne i Singapore bruker problemløsning i undervisning i så stor utstrekning, og det er selvsagt derfor elevene er så komfortable med å løse slike oppgaver og de har et så godt sett med strategier som de kan bruke [9]. Til sammenligning får svært mange norske elever "panikk" når de møter problemløsningsoppgaver, og ofte bli lærerne møtt med følgende utsagn: "Jeg skjønner ingenting jeg, lærer"

Siri begynte å spare noen penger på mandag. Hver dag fra tirsdag til fredag sparte hun 20 kr mer enn hun sparte dagen før. Hun sparte totalt 450 kr fra mandag til fredag.

Hvor mye sparte hun på mandag?

Forslag på visualisering av løsningen:



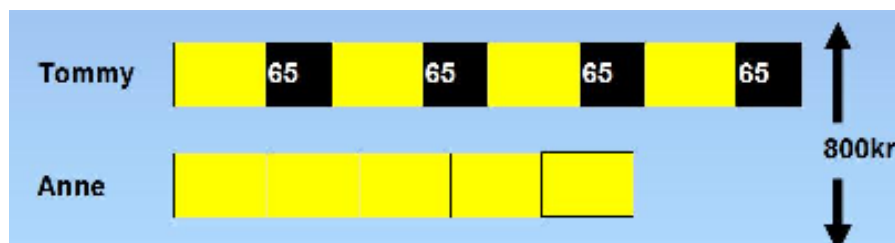
Vi vet ikke hvor mye Siri sparte på mandag (blått rektangel), men vi vet hvor mye mer hun sparte på tirsdag, nemlig 20 kr (gult rektangel). Hun sparer for hver dag 20 kr mer enn dagen før. Vi ser at til sammen blir det 10 gule rektangler ( $10 \cdot 20 = 200$  kr). Til sammen sparte hun 450 kr, og hvis vi tar bort 200 kr, har vi 250 kr igjen som skal fordeles likt på de på de fem dagene (blåe rektangler). Det gir 50 kr hver dag og

det var det hun sparte på mandagen.

Anne og Tommy har spart 800 kr til sammen.  
En firedel av Tommys sparepenger er 65 kr mer enn en femdel av Annes sparepenger.

Hvor mye mer penger har Tommy spart enn Anne?

Forslag på visualisering av løsningen:



Visualiseringen viser at hvis vi holder de 65 kr for seg, blir Tommys firedel lik Annes femdel (gult rektangel). Samler vi de 65 kr får vi 260 kr ( $4 \cdot 65 = 260$ ), og når vi trekker dem fra 800 kr blir det 540 kr igjen som skal fordeles på de ni like delene (de gule rektanglene). Det gir at hver av dem er 60 kr, dvs Tommy har spart ( $4 \cdot 60 + 260 =$ ) 500 kr og Anne ( $5 \cdot 60 =$ ) 300 kr.

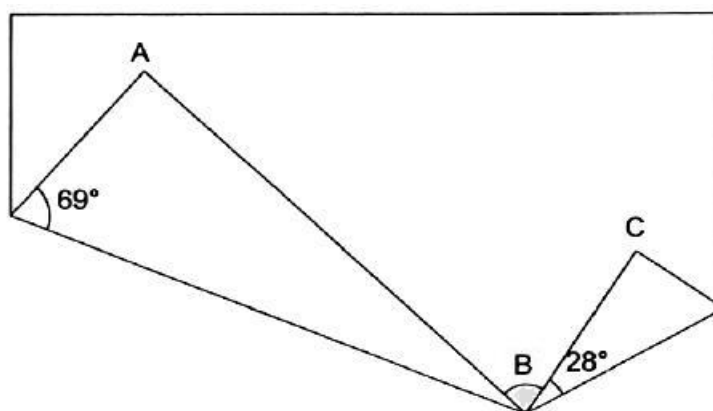
### PSLE (Primary School Leaving Examination)

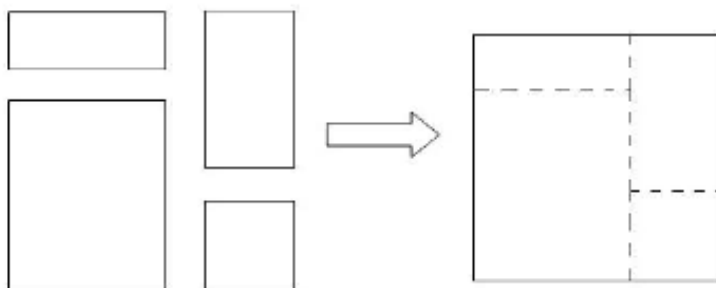
Etter 6 år på barneskolen må elevene i Singapore ta en avsluttende eksamen før de får gå videre til ungdomsskolen [10]. Prøven skal avdekke om elevene mestrer følgende kompetanser:

1. Gjenkalle spesifikke matematiske faktakunnskaper, begreper, regler og formler og til mestre tekniske regneferdigheter. (**Ferdigheter**) Utgjør 25% av prøven
2. Tolke data og bruke matematiske begreper, regler og formler og til å løse rutine oppgaver og kjente matematiske problem. (**Forståelse**) Utgjør 35% av prøven
3. Analyser data og bruke matematiske begrep, regler og formler i komplekse situasjoner, og til å løse ukjente problem. (**Anvendelse og analyse**) Utgjør 40% av prøven

Eksempler på oppgaver hentet fra ulike PSLE-sett.

Hvor stor er vinkel B?





Et kvadrat og tre rektangler er satt sammen til et stort kvadrat.

Omkretsen av det lille kvadratet og de tre rektanglene er til sammen 96 cm.

Finn arealet av det store kvadratet.

### Oppsummering

Det er på sin plass å spørre om måten Singapore ser på matematikkundervisning er så enestående? Nei, det er det selvsagt ikke. Vi trenger ikke gå lengre enn til den norske Læreplanen før vi finner de samme tankene:

*I en matematisk kompetanse inngår problemløsning. Det er å analysere og omforme et problem til matematisk form, kunne løse det og vurdere gyldigheten. I tillegg inngår språklige aspekter som det å resonnerer og kommunisere ideer. I det meste av matematisk aktivitet inngår bruk av hjelpemidler og teknologi [11].*

Den norske læreplanen er selvsagt påvirket av internasjonale trender når det gjelder matematikk. Spesielt er den inspirert av et dansk prosjekt kalt *Kompetenceudvikling og Matematiklæring*, der målet var å prøve å skape en felles forståelse for hva det vil si å beherske matematikk, og hvordan dette kan påvirke matematikkundervisningen og gjøre den bedre. Arbeidet ble ledet av Mogens Niss, professor ved Roskilde Universitetscenter, og i 2002 kom rapporten *Kompetanencer og matematiklæring* fra det danske Undervisningsministeriet [12].

Den danske rapporten vender seg bort fra den tradisjonelle, pensumbaserte beskrivelsen av matematikkfaget. I stedet foreslår den at *hensikt* og *utbytte* med undervisning karakteriseres ved hjelp av åtte kompetanser som en ønsker at elevene skal utvikle. De åtte kompetansene er: **Tankegang-, Resonnement-, Kommunikasjon-, Problembehandling-, Modellering-, Representasjon-, Symbol og formalisme- og Hjelpemiddelkompetansen.**

De slår fast at skolematematikken har i altfor stor grad vært preget av et fokus på produktet og den riktige fremgangsmåten, og at en nå ønsker å få større fokus på prosessdimensjonen i faget. Vi er nå blitt mer opptatte av *hvordan* elevene bruker sin matematiske kompetanse, hvilke strategier de velger for å løse oppgaver og problemer og hvilken begrepsforståelse de har.

Også i PISA-undersøkelsen (Programme for International Student Assessment) har prosessdimensjonen i faget grunnleggende betydning. Her blir det understreket at det kreves ulik matematisk kompetanse for å løse forskjellige typer matematiske problemer. PISA fokuserer altså i langt større grad på et mer integrert spektrum av kunnskaper, ferdigheter og holdninger enn det som har vært vanlig i tester til nå. En legger vekt på elevenes evne til å tolke informasjon og trekke slutninger på basis av kunnskap og ferdigheter som de har, og på hvordan elevene bruker kunnskaper og ferdigheter i gitte sammenhenger [13].

Men hvorfor gir ikke dette seg utslag på Norges resultat på internasjonale tester? Hvorfor lykkes Singapore og ikke vi?

Det er helt klart mange parametre som gjør seg gjeldende her, også ting som jeg ikke har berørt i denne artikkelen. For eksempel graden av krav til elevene, både i forhold til forventninger hjemmefra, men også fra skolens side. Men jeg vil likevel prøve å belyse noen av årsakene til at de har mestret med sin omlegging, mens vi ennå sliter med å få det til.

For det første har de laget en Læreplan som i langt sterkere grad vektlegger *bruk av* matematikk og problemløsning. De har tatt på alvor nødvendigheten av at elevene skal *tenke* fremfor *memorere*. For det andre har sentrale myndigheter sørget for at bare de læreverkene som følger opp Læreplanens intensjoner blir godkjente. Noe som medfører at vi finner igjen blant annet den heursitisk tankegangen i alle læreverkene fra Singapore. For det tredje og sannsynligvis den viktigste bakgrunnen for suksessen slik jeg ser det, er at det er gjennomført en strukturert og sentralt styrt etterutdanning av alle matematikklærerne i den "nye" måten å undervise matematikk på. Dermed har de på en helt annen måte enn vi har klart i Norge, å gjennomsyre de nye tankene på hva det vil si å ha god matematisk kompetanse, på alle nivå.

## Litteraturliste

[1] <http://www.timss.no/>

[2] Liv Sissel Grønmo, Ole Kristian Bergem, Marit Kjærnsli, Svein Lie, Are Turmo (2004): " *Hva i all verden har skjedd i realfagene?*" Acta Didactica, ILS, UiO

[3] Klette, K, (2003) *Evaluering av Reform 97, Klasserommets praksisformer etter Reform 97*, Unipub AS

[4] Haug, P. (2006) *Begynneropplæring og tilpassa undervisning –kva skjer i klasserommet?* Caspar forlag

[5] Ban Har, Yeap, (2007) " *Achieving the aims of future-oriented mathematics curriculum: problem solving in elementary school examination in singapore*" MATHTED 2007: An International Conference in Mathematics Education, Cebu city, Philippines

[6] Ministry of Education of Singapore (2006). *Mathematics syllabus: Primary*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

[7] <http://no.wikipedia.org/wiki/Hovedside>

[8] Kheong, F.H., Ramakrishnan, C., Soon, G.K. (2005): *My pals are here*, 1- 6, Marshall Cavendish, Singapore

[9] Ban Har, Yeap, (2007) “*The Singapore Mathematics Curriculum and Mathematical Communication* “ APEC - Tsukuba International Conference III, “Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson Study” , Tokyo Kanazawa and Kyoto, Japan

[10] Generell informasjon om PSLE fra SEAB; Singapore Examinations and Assessment Board; <http://www.seab.gov.sg/SEAB/psle/generalInfo.html>

[11] Kunnskapsløftet 2006, *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*, KUF. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

[12] Niss, M, Jensen, T. H. (2002) Utdannelsesstyrelsens temahefter nr. 18- 2002; *Kompetanser og matematiklæring*. Undervisningsministeriet, København

[13] Røsseland, Mona (2005): *Hva er matematisk kompetanse?* Tangenten nr 1 og 2, Caspar Forlag